Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi
Dergi web sayfası: http://fbd.beun.edu.tr

Araştırma Makalesi

Rasyonel Çekirdekli Belirli İntegral Operatörlerin Özdeğerlerinin Farklı Nümerik Yöntemler Kullanılarak Yaklaşık Hesabı

The Approximate Calculation of Eigenvalues of Certain Integral Operators with Rational Kernels Using Different Numerical Methods

Melih Göcen[1*], Yüksel Soykan[1], Erkan Taşdemir[2]

[1]Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Zonguldak, Türkiye
[2]Kırklareli Üniversitesi, Pınarhisar Meslek Yüksekokulu, Kırklareli, Türkiye

Öz

Bu çalışmada Ritz, Kellogg ve Trace yaklaşım metotları kullanılarak rasyonel çekirdekli belirli integral operatörlerin özdeğerleri yaklaşık olarak hesaplandı. Bu metotlar ile hesaplanan özdeğerler birbirleri ile karşılaştırıldı.

2010 AMS-Konu Sınıflandırılması: 45C05

Anahtar Kelimeler: İntegral operatörler, Özdeğer, Yaklaşık yöntemler

Abstract

In this work, the eigenvalues of certain integral operators with rational kernels are calculated using Ritz, Kellogg and Trace approximation methods. The eigenvalues calculated by these methods are compared with each other.

2010 AMS-Mathematical Subject Classification Number: 45C05

Keywords: Integral operators, Eigenvalue, Approximation methods

1. Giriş

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak kavramlar ve notasyonlar kısaca verilmiştir. Burada sunulan bilgiler (Taşdemir 2011), (Göcen 2010), (Kythe and Puri 2002) ve (Abbas 1997) kaynakları kullanılarak hazırlanmıştır.

Tanım 1.1

V bir vektör uzayı ve $K \in L(V)$ olsun. Bir $\lambda \in F$ skaleri için,

$K(x) = \lambda x$

denklemi sıfırdan farklı bir $x \in V$ çözümüne sahipse λ'ya K operatörünün bir *özdeğeri* denir.

Tanım 1.2

$S_{a,b} = \{(s,t): a \le s \le b, a \le t \le b\} = [a,b] \times [a,b] \subset R^2$

kümesi R^2 düzlemi içinde bir karedir. $k: S_{a,b} \to C$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Şimdi, herhangi bir $f \in L^2[a,b]$ için

$$g(s) = \int_a^b k(s,t) f(t)\, dt \tag{1.1}$$

ile bir $g:[a,b] \to C$ fonksiyonu tanımlayalım. g fonksiyonu bilinen ve f fonksiyonu da bilinmeyen olarak kabul edilirse o zaman (1.1) k'ya denklemin çekirdeği denir.

$$Kf(s) = \int_a^b k(s,t) f(t)\, dt \tag{1.2}$$

ile tanımlı $K: L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ operatörüne bir (k çekirdekli ya da k çekirdeğinin ürettiği) Fredholm integral operatörü veya kısaca bir integral operatör adı verilir.

Tanım 1.3

Bir H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı herhangi bir kompakt K operatörü için,

a) K operatörünün pozitif özdeğerleri

$\lambda_1^+(K) \ge \lambda_2^+(K) \ge \lambda_3^+(K) \ge ...$

*Sorumlu yazarın e-posta adresi: gocenm@hotmail.com

Geliş tarihi / Received : 11.01.2016
Kabul tarihi / Accepted : 14.03.2016

azalan sıralaması içinde katlılıkları tekrar etmek üzere $(\lambda_n^+(K))$ ile gösterilir ve K'nın negatif özdeğerleri ise artan sıralaması içinde katlılıkları tekrar etmek üzere $(\lambda_n^-(K))$ ile gösterilir.

b) K operatörünün pozitif özdeğerlerinin sayısını ve negatif özdeğerlerinin sayısını sırasıyla $N^+(K)$ ve $N^-(K)$ ile göstereceğiz.

Uyarı 1.4

Bu çalışmada $k(s,t)=\dfrac{1}{a+b(s+t)+cst}$ biçimindeki çekirdeklerin özel bir hali olan $b^2=ac$ şartını sağlayan çekirdekler incelenecektir. Bu durum (Abbas 1997) ve (Göcen 2010) tarafından araştırılmış olup bu tip çekirdeklere karşılık gelen integral operatörlerin pozitif özdeğer sayısının $N^+(K)=1$ ve negatif özdeğer sayısının $N^-(K)=0$ olduğu daha önceden gösterilmiştir.

Ritz yönteminde kullanılacak Legendre ve Chebyshev polinomlarının tanımları verilerek nümerik hesaplamalara geçilecektir. Aşağıda verilen iki tanım (Yaşar 2005) den alınmıştır.

Tanım 1.5

$$P_n(s)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{ds^n}(s^2-1)^n$$

ile tanımlanan polinoma Legendre polinomu denir. Bir kaç Legendre polinomu olarak

$$P_0(s)=1, P_1(s)=s, P_2(s)=\frac{1}{2}(3s^2-1), P_3(s)=\frac{1}{2}(5s^3-3s),\ldots \tag{1.3}$$

verilebilir. Bütün durumlarda $P_n(1)=1, P_n(-1)=(-1)^n$ dir.

Tanım 1.6

$$T_n(s)=\cos(n\cos^{-1}s),\ n=0,1,2,\ldots$$

ile tanımlanan polinoma Chebyshev polinomu denir. $T_n(s)$ için indirgeme formülü

$$T_{n+1}(s)=2sT_n(s)-T_{n-1}(s)$$

ile verilir. Chebyshev polinomlarının birkaçı

$$T_0(s)=1, T_1(s)=s, T_2(s)=2s^2-1, T_3(s)=4s^3-3s,\ldots \text{ dir.}$$

2. Gereç ve Yöntem

Rasyonel çekirdekli bazı integral operatörlerin özdeğerlerinin yaklaşık değerleri nümerik olarak (Göcen 2012), (Taşdemir 2011) ve (Göcen 2010) 'da hesaplanmıştı.

Bu bölümde ise Ritz, Kellogg ve Trace yaklaşım metotları kullanılarak rasyonel çekirdekli belirli integral operatörlerin özdeğerleri yaklaşık olarak bulunacaktır. Bu nümerik yaklaşım yöntemleri için ayrıntılı bilgilere (Krasnov et al. 1971) kaynağından ulaşılabilir.

2.1. Ritz Metodu

Bu yöntemde; çekirdeği simetrik olan, yani $k(s,t)=k(t,s)$ bağıntısını gerçekleyen aşağıdaki integral denklem ele alınacaktır.

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b k(s,t)\varphi(t)\,dt,\quad a\le s\le b.$$

$\{\psi_n(s)\}$, ilk n elemanı $[a,b]$ aralığı üzerinde lineer bağımsız ve $L^2(a,b)$'de tam olan bir fonksiyon dizisi olsun.

$$\varphi_n(s)=\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j(s) \tag{2.1}$$

şeklindedir ve burada a_j katsayıları $\|\varphi_n\|=1$ olacak şekilde belirlenecektir. Bu koşul altında $\langle K\varphi_n,\varphi_n\rangle$ kuadratik formunun değerleri aranacaktır. Sonuç olarak a_j'ler cinsinden yazılmış aşağıdaki homojen lineer denklem sistemine ulaşılmaktadır (Burada μ bir Largange çarpanıdır).

$$\sum_{j=1}^{n}\{\langle K\psi_i,\psi_j\rangle-\mu\langle\psi_i,\psi_j\rangle\}a_j=0,\quad i=1,2,\ldots,n \tag{2.2}$$

(2.2) homojen denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözümünün olması için (2.2) denklem sistemine karşılık gelen katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Yani,

$$\begin{vmatrix}\langle K\psi_1,\psi_1\rangle-\mu\langle\psi_1,\psi_1\rangle & \cdots & \langle K\psi_1,\psi_n\rangle-\mu\langle\psi_1,\psi_n\rangle\\ \langle K\psi_2,\psi_1\rangle-\mu\langle\psi_2,\psi_1\rangle & \cdots & \langle K\psi_2,\psi_n\rangle-\mu\langle\psi_2,\psi_n\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle K\psi_n,\psi_1\rangle-\mu\langle\psi_n,\psi_1\rangle & \cdots & \langle K\psi_n,\psi_n\rangle-\mu\langle\psi_n,\psi_n\rangle\end{vmatrix}=0 \tag{2.3}$$

olur. (2.3) denkleminin kökleri $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerini yaklaşık olarak verir. (2.1) denkleminin en büyük kökü, özdeğerlerinin en büyüğünü olduğundan daha küçük olarak verir. (2.3) den μ'yü bulup (2.2) dığımızda (2.2) a_j $(i=1,2,\ldots,n)$ çözümleri elde edilecektir. Böylece bulunan a_j değerlerinin (2.1) ası ile elde edilen özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar yaklaşık olarak bulunmaktadır (Kythe and Puri 2002). Ritz metodunda, p_i polinomu i inci dereceden Legendre polinomu ve T_i polinomu ise i inci dereceden Chebshyev polinomu olup $\psi_i(s)=P_{i-1}(s)$; $i=1,\ldots,n$ ve $\psi_i(s)=T_{i-1}(s)$; $i=1,\ldots,n$ şeklindedir. Ayrıca bu polinomlar (-1,1) aralığında ortogonaldir. Bu polinomlar kullanılarak hesaplamalarda gerekli olan değerler aşağıdaki tablolarda verilmiştir (Çizelge 1, 2).

2.1.1. Örnek

Sadece bir tane pozitif özdeğere sahip olan (Bkz. Uyarı 1.4)

Çizelge 1. Kullanılan polinomlar için gerekli hesaplamalar tablosu.

	Legendre Polinomu (P_i)	Chebyshev Polinomu (T_i)
$i = j$	$\langle P_i, P_j \rangle = \frac{2}{2_i + 1}; i,j = 1,2,...,n$	$\langle T_i, T_j \rangle = \frac{\pi}{2}; i,j = 1,2,...,n$ $\langle T_0, T_0 \rangle = \pi; i,j = 0$
$i \neq j$	$\langle P_i, P_j \rangle = 0; i,j = 1,2,...,n$	$\langle T_i, T_j \rangle = 0; i,j = 1,2,...,n$

Çizelge 2. Kullanılan polinomlar için iç çarpım hesaplamaları tablosu.

	Legendre Polinomu (P_i)	Chebyshev Polinomu (T_i)
$\langle \psi_1, \psi_1 \rangle$	2	π
$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$	0	0
$\langle \psi_2, \psi_2 \rangle$	$\frac{2}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$$k(s,t) = \frac{1}{16 + 4(s+t) + st} \tag{2.4}$$

simetrik çekirdekli integral operatörün özdeğerini Ritz yöntemi kullanarak yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm

(2.1) denkleminde Legendre ve Chebshyev polinomları kullanılarak n = 2 için özdeğer hesaplaması yapılacaktır. n = 2 durumu için öncelikle Legendre polinomlarını kullanarak hesaplama yapalım. İlk olarak (2.3) denklem sistemi için gerekli değerleri hesaplayalım.

$$\langle K\psi_1, \psi_1 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{16 + 4(s+t) + st} dsdt = 0.26094$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{16 + 4(s+t) + st} dsdt = -0.02212$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{16 + 4(s+t) + st} dsdt = 1.8751 \times 10^{-3}$$

dir. Buradan

$$\begin{vmatrix} 0.26094 - 2\mu & -0.02212 \\ -0.02212 & 1.8751 \times 10^{-3} - \frac{2}{3}\mu \end{vmatrix} = 0$$

şeklinde elde edilen (2.3) çözüldüğünde

μ_1=0.13329, μ_2=3.2671x10^{-8}

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri,

$$\lambda_1 = \frac{1}{0.13329} = 7.5024$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{-3.2671 \times 10^{-8}} = -3.0608 \times 10^{7}$$

olarak elde edilir. Fakat aranan özdeğer pozitif olacağından dolayı

λ = 7.5024

dir. Şimdi aynı çekirdek için Chebyshev polinomları kullanarak n = 2 durumu için hesaplama yapalım. İlk olarak klem sistemi için gerekli değerleri bulalım.

$$\langle K\psi_1, \psi_1 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}\,(16 + 4(s+t) + st)} dsdt = 0.414359$$

$$\langle K\psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-s^2}\,(16 + 4(s+t) + st)} dsdt = -0.0351251$$

$$\langle K\psi_2, \psi_2 \rangle = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{st}{\sqrt{1-s^2}\,(16 + 4(s+t) + st)} dsdt = 0.00446147$$

dir. Buradan (2.3) $\begin{vmatrix} 0.414359 - \pi\mu & -0.0351251 \\ -0.0351251 & 0.00446147 - \frac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix} = 0$

şeklinde elde edilir ve eşitlik çözüldüğünde

μ_1=0.1338, μ_2=9.3122x10^{-4}

olur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri,

$$\lambda_1 = \frac{1}{0.1338} = 7.4738$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{9.3122 \times 10^{-4}} = 1073.9$$

olarak elde edilir. Burada aranan özdeğer yaklaşık olarak

λ = 7.4738

dir.

2.1.2. Örnek

Sadece bir tane pozitif özdeğere sahip olan (Bkz. Uyarı 1.4)

$$k(s,t)=\frac{1}{81-18(s+t)+4st} \tag{2.5}$$

simetrik çekirdekli integral operatörün özdeğerini Ritz yöntemi kullanarak yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm

(2.1) n = 2 için özdeğer hesaplaması yapılacaktır. n = 2 durumu için öncelikle Legendre polinomlarını kullanarak hesaplama yapalım. İlk olarak (2.3) erekli değerleri hesaplayalım.

$$\langle K\psi_1,\psi_1\rangle=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{81-18(s+t)+4st}dsdt=0.0510726$$

$$\langle K\psi_1,\psi_2\rangle=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{t}{81-18(s+t)+4st}dsdt=0.00383431$$

$$\langle K\psi_2,\psi_2\rangle=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{st}{81-18(s+t)+4st}dsdt=0.000287863$$

dir. Buradan

$$\begin{vmatrix} 0.0510726-2\mu & 0.00383431 \\ 0.00383431 & 0.000287863-\frac{2}{3}\mu \end{vmatrix}=0$$

şeklinde elde edilen (2.3) μ_1=0.025969, μ_2=-6.1582x10^{-10}

bulunur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri,

$$\lambda_1=\frac{1}{0.025969}=38.507$$

$$\lambda_2=\frac{1}{-6.1582\times10^{-10}}=-1.6239\times10^{9}$$

olarak elde edilir. Fakat aranan özdeğer pozitif olacağından dolayı

λ = 38.507

dir. Şimdi aynı çekirdek için Chebyshev polinomları kullanarak n = 2 durumu için hesaplama yapalım. İlk olarak

$$\langle K\psi_1,\psi_1\rangle=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}\,(81-18(s+t)+4st)}dsdt=0.0809093$$

$$\langle K\psi_1,\psi_2\rangle=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{t}{\sqrt{1-s^2}\,(81-18(s+t)+4st)}dsdt=0.00607432$$

$$\langle K\psi_2,\psi_2\rangle=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{st}{\sqrt{1-s^2}\,(81-18(s+t)+4st)}dsdt=0.000683469$$

dir.Buradan (2.3) $\begin{vmatrix} 0.0809093-\pi\mu & 0.00607432 \\ 0.00607432 & 0.000683469-\frac{\pi}{2}\mu \end{vmatrix}=0$

şeklinde elde edilir ve eşitlik çözüldüğünde

μ_1=0.026046, μ_2=1.4317x10^{-4}

olur. $k(s,t)$ çekirdeğinin özdeğerlerinin ikisinin yaklaşık değeri,

$$\lambda_1=\frac{1}{0.026046}=38.394$$

$$\lambda_2=\frac{1}{1.4317\times10^{-4}}=6984.7$$

olarak elde edilir. Burada aranan özdeğer yaklaşık olarak

λ = 38.394

dir.

2.2. Kellogg Metodu

$k(s,t)$ çekirdeği pozitif tanımlı simetrik bir çekirdek ve $w(s)$, $L^2(a,b)$ içinde keyfi bir fonksiyon olsun.

$$w_1(s)=\int_a^b k(s,t)\,w(t)\,dt$$

$$w_2(s)=\int_a^b k(s,t)\,w_1(t)\,dt$$

$$\vdots$$

$$w_n(s)=\int_a^b k(s,t)\,w_{n-1}(t)\,dt$$

$$\vdots$$

olmak üzere

$$\{w_n(s)\}=K^n w,\quad n=1,2,3,... \tag{2.6}$$

ile tanımlı fonksiyon dizisi ve

$$\frac{\|w_{n-1}\|}{\|w_n\|} \tag{2.7}$$

ile belirlenen sayı dizisi ele alınmaktadır.

$k(s,t)$ çekirdeğinin ortogonal özfonksiyonları $\varphi_1(s),\varphi_2(s),\ldots$ ve bunlara karşılık gelen özdeğerler $\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots$ olsun. Bunların yanı sıra $w(s)$ fonksiyonları, $\varphi_1(s),\varphi_2(s),\ldots,\varphi_{k-1}(s)$ fonksiyonları ile ortogonal olsun fakat $\varphi_k(s)$ fonksiyonu ile ortogonal olmasın. Bu durumda (2.7) λ_k özdeğeri olacaktır. Bu takdirde,

$$\frac{w_n}{\|w_n\|}$$

fonksiyon dizisi λ_k özdeğeri ile eşlenen özfonksiyonların lineer kombinasyonu olan bir fonksiyona yakınsayacaktır.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\|w_n\|}} \tag{2.8}$$

dizisi de (2.7) dizisinin yakınsadığı değere yakınsayacaktır. $\langle w,\varphi_1\rangle\neq0$ ise en küçük özdeğeri veren iki ayrı formül bulunabilir:

$$\lambda_1\approx\frac{\|w_{n-1}\|}{\|w_n\|} \tag{2.9}$$

ve

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[n]{\| w_n \|}} \tag{2.10}$$

dir. (2.9) formülü λ_1 in değerini olduğundan daha büyük olarak verir. $k(s,t)$ çekirdeği pozitif tanımlı değil ise (2.9) (2.10) formülleri verilen çekirdeğin özdeğerinin en küçük olanının mutlak değerini verir. Bu metot, sadece λ_1 özdeğerinin yaklaşık değerini bulmak için yapılan en iyi yaklaşımdır.

2.2.1. Örnek

$$k(s,t) = \frac{1}{16 + 4(s+t) + st} \tag{2.11}$$

simetrik çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün özdeğerini Kellogg metodu ile yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm

$w(s) = s$ alındığında (2.6) da verilen fonksiyon dizisi

$$w_1(s) = \int_{-1}^{1} \frac{t}{16 + 4(s+t) + st} dt = \frac{2\left(1 - 2\log\frac{5}{3}\right)}{(4+s)}$$

$$w_2(s) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{16 + 4(s+t) + st} \frac{2\left(1 - 2\log\frac{5}{3}\right)}{(4+t)} dt = \frac{4\left(1 - 2\log\frac{5}{3}\right)}{15(4+s)}$$

$$w_3(s) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{16 + 4(s+t) + st} \frac{4\left(1 - 2\log\frac{5}{3}\right)}{15(4+t)} dt = \frac{8\left(1 - 2\log\frac{5}{3}\right)}{225(4+s)}$$

$\vdots$

$$w_n(s) = \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} \frac{2\left(1 - 2\log\frac{5}{3}\right)}{(4+s)}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \| w_n(s) \| &= \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} 2\left(1 - 2\log\frac{5}{3}\right)\sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{1}{(4+s)^2} ds} \\ &= \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} 2\left(1 - 2\log\frac{5}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{15}} \end{aligned}$$

bulunur ve özdeğer yaklaşık olarak

$$\lambda_1 \approx \frac{\left(\frac{2}{15}\right)^{n-2} 2\left(1 - 2\log\frac{5}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{15}}}{\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} 2\left(1 - 2\log\frac{5}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{15}}} = 7.5$$

elde edilir.

2.2.2. Örnek

$$k(s,t) = \frac{1}{81 - 18(s+t) + 4st} \tag{2.12}$$

simetrik çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün özdeğeri Kellogg metodu ile yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm

$w(s) = s$ alındığında (2.6) a verilen fonksiyon dizisi

$$w_1(s) = \int_{-1}^{1} \frac{t}{81 - 18(s+t) + 4st} dt = \frac{4 + 9\log\frac{7}{11}}{4(2s-9)}$$

$$w_2(s) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{81 - 18(s+t) + 4st} \frac{4 + 9\log\frac{7}{11}}{4(2t-9)} dt = \frac{4 + 9\log\frac{7}{11}}{154(2s-9)}$$

$$w_3(s) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{81 - 18(s+t) + 4st} \frac{4 + 9\log\frac{7}{11}}{154(2t-9)} dt = \frac{4 + 9\log\frac{7}{11}}{5929(2s-9)}$$

$\vdots$

$$w_n(s) = \left(\frac{2}{77}\right)^{n-1} \left(\frac{4 + 9\log\frac{7}{11}}{2s-9}\right)$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \| w_n(s) \| &= \left(\frac{2}{77}\right)^{n-1} \left(4 + 9\log\frac{7}{11}\right)\sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{1}{(2s-9)^2} ds} \\ &= \left(\frac{2}{77}\right)^{n-1} \left(4 + 9\log\frac{7}{11}\right)\sqrt{\frac{2}{77}} \end{aligned}$$

bulunur ve özdeğer yaklaşık olarak

$$\lambda_1 \approx \frac{\left(\frac{2}{77}\right)^{n-2} \left(4 + 9\log\frac{7}{11}\right)\sqrt{\frac{2}{77}}}{\left(\frac{2}{77}\right)^{n-1} \left(4 + 9\log\frac{7}{11}\right)\sqrt{\frac{2}{77}}} = 38.500$$

elde edilir.

2.3. Trace (İz) Metodu

$k_m(s,t)$ ile m. ardışık çekirdek gösterilmek üzere

$$A_m = \int_a^b k_m(s,t)\, dt$$

sayısına $k(s,t)$ çekirdeğinin m. izi adı verilir ve

$$(K^m \phi) = \int_a^b k_m(s,t)\, \phi(t)\, dt, \quad a \le s \le t \le b$$

dir.

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}} \tag{2.13}$$

Formülü en küçük karakteristik sayı olan λ_1 ve m'nin yeterince büyük değerleri için geçerlidir. (2.13) formülü $|\lambda_1|$ 'in değerini olduğundan daha büyük olarak verir. Simetrik çekirdekler için çift mertebeden izler,

$$A_{2m} = \int_a^b \int_a^b k_m^2(s,t)\, dtds = 2\int_a^b \int_a^s k_m{}^2(s,t)\, dtds \tag{2.14}$$

formülü yardımıyla hesaplanır.

2.3.1. Örnek

$$k(s,t) = \frac{1}{16 + 4(s+t) + st} \tag{2.15}$$

Çizelge 3. Hesaplanan özdeğerlerin yaklaşık değerlerinin tablosu.

$k(s,t)$	Ritz Metodu		Trace Metodu	Kellogg Metodu
	Legendre Polinomları Yardımıyla	Chebyshev Polinomları Yardımıyla		
$k(s,t)=\dfrac{1}{16+4(s+t)+st}$	λ= 7.502	λ= 7.473	λ= 7.5	λ= 7.5
$k(s,t)=\dfrac{1}{81-18(s+t)+4st}$	λ= 38.507	λ= 38.394	λ= 38.500	λ= 38.500

simetrik çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün özdeğerini Trace metodu ile yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm

(2.15) $k(s,t)$ çekirdeği simetrik olduğundan,

$$\begin{aligned}k_2(s,t) &= \int_{-1}^{1} k(s,z)k(z,t)\,dz\\ &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{16+4(s+z)+sz}\right)\left(\frac{1}{16+4(z+t)+zt}\right)dz\\ &= \frac{2}{15(4+s)(4+t)}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (2.14) denkleminde m=1 ve m=2 alındığında,

$$A_2=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k_1^2(s,t)\,dsdt=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{16+4(s+t)+9st}\right)^2 dsdt=\frac{4}{225}$$

$$A_4=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k_2^2(s,t)\,dsdt=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{15(4+s)(4+t)}\right)^2 dsdt=\frac{16}{50625}$$

değerleri bulunur. Bu değerler, özdeğeri bulmak için (2.13) de yerine yazıldığında, aranan özdeğerin yaklaşık olarak

$$|\lambda_1|\approx\sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}=\sqrt{\frac{\frac{2}{225}}{\frac{16}{50625}}}=\sqrt{\frac{225}{4}}=7.5$$

olduğu görülür.

2.3.2. Örnek

$$k(s,t)=\frac{1}{81-18(s+t)+4st} \tag{2.16}$$

simetrik çekirdeğine karşılık gelen integral operatörün özdeğerini Trace metodu ile yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm

(2.16) ile verilen $k(s,t)$ çekirdeği simetrik olduğundan,

$$\begin{aligned}k_2(s,t) &= \int_{-1}^{1} k(s,z)k(z,t)\,dz\\ &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{81-18(s+z)+4sz}\right)\left(\frac{1}{81-18(z+t)+4zt}\right)dz\\ &= \frac{2}{77(2s-9)(2t-9)}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (2.14) denkleminde m=1 ve m=2 alındığında,

$$A_2=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k_1^2(s,t)\,dsdt=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{81-18(s+t)+4st}\right)^2 dsdt=\frac{4}{5929}$$

$$A_4=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k_2^2(s,t)\,dsdt=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{77(2s-9)(2t-9)}\right)^2 dsdt=\frac{16}{35153041}$$

değerleri bulunur. Bu değerler, özdeğeri bulmak için (2.13) de yerine yazıldığında, aranan özdeğerin yaklaşık olarak

$$|\lambda_1|\approx\sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}=\sqrt{\frac{\frac{4}{5929}}{\frac{16}{35153041}}}=\sqrt{\frac{5929}{4}}=38.500$$

olduğu görülür.

3. Sonuçlar

Bu çalışmada, özel olarak

$$k(s,t)=\frac{1}{16+4(s+t)+st}$$

ve

$$k(s,t)=\frac{1}{81-18(s+t)+4st}$$

rasyonel çekirdeklerine karşılık gelen integral operatörlerin özdeğerleri Ritz, Trace ve Kellogg yaklaşım metotları kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Ritz metodu kullanılırken (2.1) n = 2 alınarak hesaplamalar yapıldı. (Göcen 2012) de n sayısı artırılarak da hesaplamalar yapıldığında sonuçların benzer şekilde çıktığı görülmektedir. Yukarıda bahsedilen üç nümerik yaklaşım yöntemiyle hesaplanan özdeğerlerin yaklaşık değerleri Çizelge 3'de verilmiştir.

Sonuç olarak tablo ayrıntılı olarak incelendiğinde her iki çekirdek için de Trace ve Kellogg metotları ile elde edilen özdeğerlerin nümerik olarak eşit olduğu kolayca görülebilir.

Ayrıca Ritz metodu ile elde edilen özdeğerlerde ise Legendre polinomları kullanılarak elde edilen özdeğerlerin nümerik değerleri, Chebyshev polinomları kullanılarak elde edilen özdeğerlerin nümerik değerlerinden az daha büyüktür.

Ancak tablo genel olarak incelendiğinde her üç metot ile elde edilen özdeğerlerin nümerik değerlerinin yaklaşık olarak birbirine çok yakın olduğu görülebilir.

4. Kaynaklar

Al Abbas, MA. 1997. Integral Operators with Rational Kernels. PhD Thesis. University of Manchester. 119pp.

Göcen, M. 2010. Rasyonel Çekirdekli İntegral Operatörler. Doktora Tezi. Zonguldak Karaelmas Üniversitesi. 98s.

Göcen, M., Soykan, Y. 2012. On numerical calculations of eigenvalues using Ritz Method. *A.M.S*, 6(40): 1973-1990.

Krasnov, M., Kiselev, A., Makarenko, G. 1971. Problems and Exercises in Integral Equation. Mir Publisher. Moscow. 215pp.

Kythe, PK., Puri, P. 2002. Computational Methods for Linear Integral Equations. Birkhauser. Boston. 508pp.

Taşdemir, E. 2011. Pozitif İntegral Operatörler. Yüksek Lisans Tezi. Zonguldak Karaelmas Üniversitesi. 124s.

Yaşar, İ.B. 2005. Uygulamalı Matematik. Siyasal Kitabevi. Ankara. 289s.