



KESİKLİ DOĞRUSAL OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNDE ÜÇLÜ ROGUE DALGALARI

Semiha TOMBULOĞLU *

Sağlık Hizmetleri MYO, Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli, Türkiye

ÖZET

Rogue dalgaları, deniz yüzeyinde birdenbire belirir ve hızla kaybolur. Genlikleri geri kalan deniz yüzeyinden en az iki kat daha yüksektir. Birçok farklı fiziksel alanda gözlenebilir olması sebebiyle önemlidir. Bu çalışmada, bir boyutlu doğrusal olmayan kesikli Schrödinger (DNLS) denklemini belirli başlangıç koşulunda ve periyodik sınır koşulları altında nümerik olarak çözdük. Başlangıç koşulundaki katsayılar arasında belirli bir oran olduğunda üçlü rogue dalgası elde edileceğini gösterdik. Başlangıç fonksiyonundaki katsayıların küçük değişiminin rogue dalgaların evrilmesini önemli derecede etkilediğini ortaya koyduk.

Keywords: Rogue dalgası, Kesikli doğrusal olmayan Schrödinger denklemi, Üçlü rogue dalgası

ABSTRACT

Rogue waves appear suddenly on the sea surface and disappear quickly. Their amplitude is at least two times higher than the rest of the sea. They are important because they can be observed in many different physical fields. In this study, we solve one-dimensional discrete nonlinear Schrödinger (DNLS) equation numerically under certain initial conditions and periodic boundary conditions. We show that when there is a certain ratio between the coefficients in the initial condition, a triple rogue wave will be obtained. We reveal that the small change of initial function coefficients significantly affects the evolution of rogue waves.

Keywords: Rogue wave, Discrete nonlinear Schrödinger equation, Rogue wave triplets

1. GİRİŞ

Rogue dalgaları, haydut dalgalar, dev dalgalar, anormal dalgalar gibi çeşitli isimlerle de bilinen, deniz yüzeyinde aniden beliren hiç oluşmamış gibi aniden yok olan dalgalardır [1]. Genlikleri deniz seviyesinden en az iki kat daha yüksektir [2]. Rogue dalgaları ilginç doğaları gereği teorik ve deneysel çalışmalara konu olmuş ve araştırmacılar tarafından ilgi odağı haline gelmiştir. Bu durumun sebeplerinden bir tanesi de rogue dalgaların doğrusal olmayan fiber optik, Bose-Einstein yoğunlaşması, plazma, akustik, finans gibi farklı fiziksel ortamlarda gözlenebilmesidir[3-9]. Şimdiye kadar çok sayıda çalışma yapılmış olmasına karşın rogue dalgalarının özellikleri henüz tam olarak anlaşılamamıştır. Rogue dalgalarının yapısını araştıran bilim adamları doğrusal ve doğrusal olmayan denklemlerle rogue dalgalarını açıklamaya çalışmışlardır. Rogue dalgalarının Gauss dağılımı ile istatistiksel analizi yapılmış ve doğrusal denklemler rogue dalgalarını açıklamada yetersiz kalmıştır [2, 10].

Bir boyutlu doğrusal olmayan Schrödinger denklemi rogue dalgalarını anlamada önemli bir adımdır. 1983 yılında Peregrine doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin analitik çözümünü elde etmiştir [11]. Uzay

*Sorumlu Yazar: semihatombuloglu@klu.edu.tr

Geliş: 22.10.2019 Yayın: 28.02.2020

ve zaman koordinatlarında lokalize olmuş Peregrine solitonu rogue dalgalarının açıklanmasında prototip olduğu görülmüştür [12]. Peregrine solitonu hiç bir belirti yokken birden ortaya çıkar, sonrasında genliği çevre genliğinden yaklaşık üç kat daha yüksek olacak şekilde evrilir, zamanla genliği azalarak genişlik artar ve ardında hiçbir iz bırakmadan kaybolur [1, 13]. Peregrine solitonu, 2010 yılında deneysel olarak fiber optik ortamda gözlemlenmiştir [14]. Bir yıl sonra, rogue dalgaları su tankında gözlemlenmiştir [5]. Yapılan bu deneyler, teorik öngörülerle mükemmel bir uyum içerisindedir ve rogue dalgalarının doğrusal olmayan denklemlerle açıklanabileceğini destekler niteliktedir.

NLS denklemi,

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + g |\Psi|^2 \Psi \quad (1)$$

olarak verilir [15]. Burada t zaman koordinatı, x konum koordinatı, g ise doğrusal olmayan terimin katsayısıdır. $g = -1$ olduğu durumda odaklanan doğrusal olmayan Schrödinger denklemidir.

Kesikli doğrusal olmayan Schrödinger denklemi (DNLS), NLS denkleminin genel formundan sonlu farklar yöntemi ile kesikli hale getirilerek elde edilebilir. DNLS doğrusal olmayan örgü dinamik modelleri için en temel denklemlerden biridir [16] ve bir boyutta soliton çözümlerini sağlar. Kesikli sistemlerde rogue dalgalarının anlaşılması için DNLS denklemi kullanılabilir. Bludov, Konotop ve Akhmediev yapmış oldukları çalışmada DNLS denklemini bir dizi doğrusal olmayan dalga kılavuzlarına uygulamışlar ve kesikli rogue dalgaları elde etmişlerdir [17]. Bu çalışmada ise, DNLS denklemini kullanarak belirli başlangıç koşulu altında ve periyodik sınır koşullarında kesikli rogue dalgalarını inceleyeceğiz. Başlangıç koşulundaki katsayıların ufak değişiminden rogue dalgasının önemli derecede etkileceğini ve rogue dalgalarının zamanla nasıl evrildiğini göstereceğiz. Ayrıca belirli başlangıç koşulunda uygun katsayılar seçerek birbirine yakın konumda oluşan üç tane rogue dalgası elde edeceğiz.

2. BELİRLİ BAŞLANGIÇ KOŞULUNDA KESİKLİ ROGUE DALGALARI

DNLS denklemi,

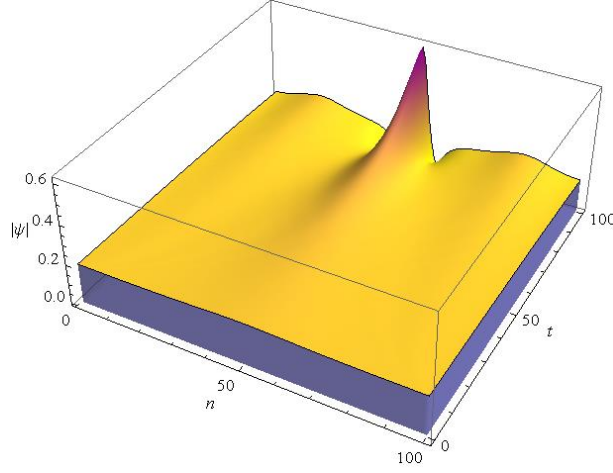
$$i \frac{d\psi_n}{dt} + \psi_{n+1} + \psi_{n-1} + |\psi_n|^2 \psi_n = 0 \quad (2)$$

ile verilir [16]. Sonlu farklar yöntemine göre, denklem 1' e sonlu fark yaklaşıklığı uygulandığında denklem 2' ye indirgenebilir. Burada belirli aralıklara bölünmüş zaman ve konum koordinatlarının her bir bağlantı noktasındaki dalga fonksiyonu ψ_n ile ifade edilmiştir. Bu bağlamda, rogue dalga yapısının değişimini görmek için çözümü bilinen bir başlangıç koşulunu [17],

$$\psi_n(t=0) = A e^{-iA^2L} \left(1 - 4 \frac{1 - q_0 i A^2 L}{1 + q_1 A^2 n^2 + q_2 A^4 L^2} \right) \quad (3)$$

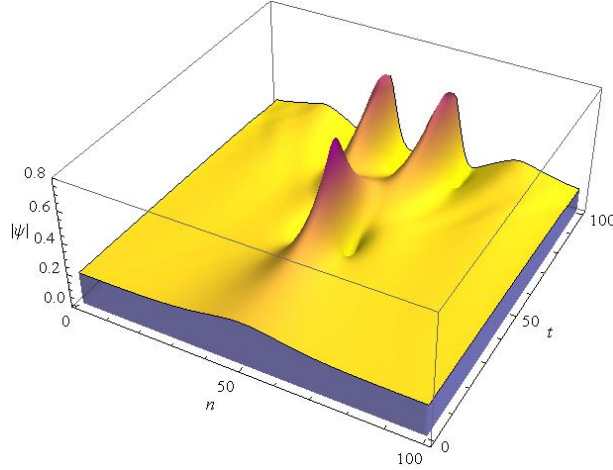
ele alalım. Burada, L dizideki her dalga kılavuzunun uzunluğu ve $A \ll 1$ olmak üzere arka plan genliğidir. Periyodik sınır koşulları altında başlangıç koşulunu denklem 3 olarak denklem 2' yi sonlu farklar yöntemiyle nümerik olarak çözeceğiz.

Denklem 3' te $q_1 = 2$, $q_2 = 4$ ve $q_0 = 2$ alınarak bu başlangıç koşulu için denklem 2 çözülmüş ve şekil 1' deki gibi genliği çevre genliğinden üç kat büyük olan Peregrine Solitonu referans 17 ve 18' de bulunmuştur [17,18].



Şekil 1. $A=0.2$, $L=100$ değerleri için alan genliğinin mutlak değer grafiği (başlangıç fonksiyonu olarak denklem 2 alınmıştır.)

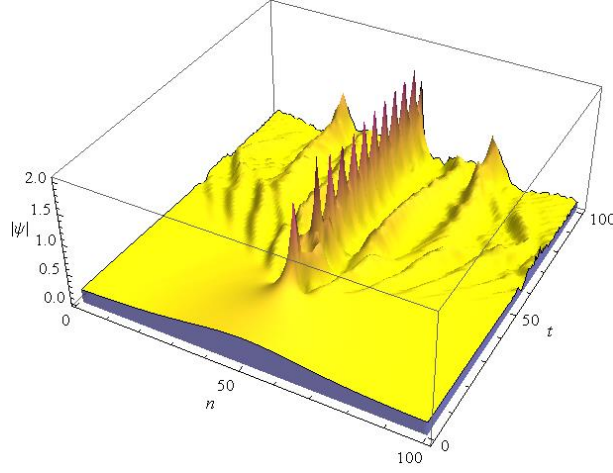
Şimdi başlangıç fonksiyonu terimi katsayılarında ufak bir değişiklik yapalım. Denklem 3’ te yine $q_1 = 2$, $q_2 = 4$ olarak ele alalım ve bu sefer $q_0 = 4$ olsun. Bu durumda, şekil 2’ deki gibi genliği çevre genliğinden yaklaşık olarak üç kat büyük olan üç tane rogue dalgası elde edilmiştir.



Şekil 2. $A=0.2$, $L=100$ değerleri için alan genliğinin mutlak değer grafiği (başlangıç fonksiyonu olarak denklem 2 alınmıştır.)

Literatürde bu durum “three sister” veya “triplets” olarak geçmektedir [19]. Başlangıç fonksiyonundaki çok ufak bir değişikliğin rogue dalgasının yapısını tamamen değiştirdiği görülmektedir. Bu durum, rogue dalgalarının sadece tekil dalga olarak değil aynı zamanda dalga paketi olarak oluşabileceğinin göstergesidir.

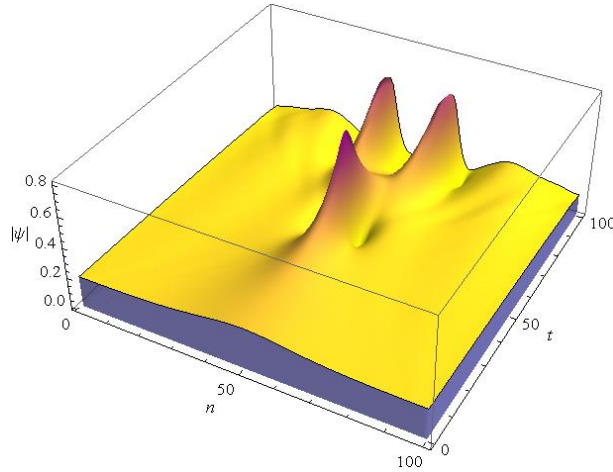
Şimdi de rogue dalgalarının zamanla nasıl evrileceğini görmek için 3 numaralı denklemin katsayılarında küçük bir değişiklik yapalım ve $q_1 = 2$, $q_2 = 4$ ve $q_0 = 8$ olarak ele alalım.



Şekil 3. $A=0.2$, $L=100$ değerleri için alan genliğinin mutlak değer grafiği (başlangıç fonksiyonu olarak denklem 2 alınmıştır.)

Şekil 3'te de görüldüğü gibi $q_0=8$ olduğunda çok sayıda rogue dalgası oluşmuş ve oluşan rogue dalgaları yayılma doğrultusunda periyodik bir yapı göstermiştir. Buna göre, oluşan rogue dalga sayısı q_0 parametresine hassas bir şekilde bağlıdır ve q_0 değeri belirli bir değere kadar arttıkça, oluşan rogue dalga sayısı artar ve komşu bölgelerde kaotik davranış gözlenir.

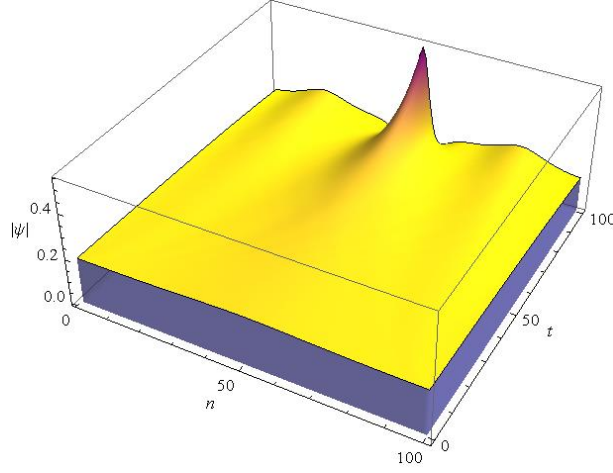
Peki rogue dalgaların dinamiği q_2 değerlerine nasıl bağlıdır ve q_0 değeriyle ilişkili seçilmeli midir? Bu durumu anlamak için şimdi de $q_0 = 3$ ve $q_1 = 2$ olmak üzere çeşitli q_2 değerleri için rogue dalga çözümlerini araştıralım. $q_2 = 3$ olduğu durum için elde edilen grafik şekil 4'te gösterilmiştir.



Şekil 4. $A=0.2$, $L=100$ değerleri için alan genliğinin mutlak değer grafiği (başlangıç fonksiyonu olarak denklem 2 alınmıştır.)

Şekil 4'ten de görüldüğü gibi genliği çevre genliğinden yaklaşık olarak 2 kat büyük olan üç tane dalga meydana gelmiştir. Bu durumda, üçlü rogue dalgası elde etmek için denklem 3 gibi bir başlangıç koşulundaki katsayılar, q_2 ve q_0 , birbirleriyle ilişkili seçilmelidir.

$q_0 = 3$ ve $q_1 = 2$ olmak üzere $q_2 = 6$ olduğu durum için rogue dalga dinamiği şekil 5'teki gibidir.



Şekil 5. $A=0.2$, $L=100$ değerleri için alan genliğinin mutlak değer grafiği (başlangıç fonksiyonu olarak denklem 2 alınmıştır.)

Şekil 5’te tekil bir rogue dalgası meydana gelmiştir. Belirli q_0 ve q_2 değerlerinde oluşan rogue dalgalarının sayısı değişmektedir. Bu durumda, q_0 , q_1 ve q_2 değerleri $[1,10]$ rastgele reel sayı olarak seçilip, $q_0 = q_2$ seçildiği durumda birbirine yakın durumda meydana gelen üç tane rogue dalgası oluşmaktadır. q_1 değeri $3q_0$ değerine kadar seçildiğinde üçlü rogue dalga yapısı korunmaktadır. Tekil rogue dalgası oluşması için belirli q_1 değerlerinde yine q_0 ile q_2 nin birbirine bağlı seçilmesi gerekir ($2q_0 = q_2$).

3. SONUÇ

Bu çalışmada, kesikli rogue dalgalarını, bir boyutlu kesikli doğrusal olmayan Schrödinger denklemiyle belirli başlangıç koşulu altında ve periyodik sınır koşullarında nümerik olarak inceledik. Peregrine solitonu için bulunmuş olan başlangıç fonksiyonun katsayıları arasında belirli bir oran ($q_0 = q_2$) olduğunda, literatürde “üç kız kardeş” olarak tanımlanan üç tane rogue dalgası oluştuğunu gösterdik. Bu katsayıların rogue dalga dinamiğini önemli şekilde etkilediğini ve değışmesi halinde oluşan rogue dalga sayısının da değıştiğini gördük. Ayrıca yapmış olduğumuz bu çalışma ile katsayıları belirli bir oranda seçtiğimiz takdirde, yine tekil rogue dalgası elde edilebileceği gösterilmiştir.

KAYNAKÇA

- [1] Pelinovsky E, Kharif C. *Extreme Ocean waves*. 1st ed. Netherlands: Springer, 2008.
- [2] Kharif C, Pelinovsky E. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *Eur J Mech* 2003; 22: 603–634.
- [3] Dysthe K, Krogstad HE, Müller P. Oceanic rogue waves. *Annu Rev Fluid Mech* 2008; 40: 287–310.
- [4] Tulin M. P, Waseda T. *Laboratory observations of wave group evolution, including breaking effects*. J Fluid Mech 1999; 378: 197-232.
- [5] Chabchoub A, Hoffmann NP, Akhmediev N. Rogue wave observation in a water wave tank. *Phys Rev Lett* 2011;106: 204502.
- [6] Wen L, Li L, Li Z-D, Song S-W, Zhang X-F, Liu WM. Matter rogue wave in Bose-Einstein condensates with attractive atomic interaction. *Eur Phys J D* 2011; 64: 473–478.

- [7] Moslem WM. Langmuir rogue waves in electron-positron plasmas. *Phys Plasmas* 2011; 18: 32301.
- [8] Selim MM, Abdelwahed HG, El-Attafi MA. Nonlinear dust acoustic rogue waves in a two temperature charged dusty grains plasma. *Astrophys Space Sci* 2015; 359, no. 1.
- [9] Zhen-Ya Y. Financial rogue waves. *Commun. Theor Phys* 2010; 54: 947.
- [10] Waseda T, Kinoshita T, Tamura H. Evolution of a random directional wave and freak wave occurrence. *J Phys Oceanogr* 2009; 39: 621–639.
- [11] Peregrine DH. Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions. *J Aust Math Soc Ser B Appl Math* 1983; 25: 16.
- [12] Shrira VI, Geogjaev VV. What makes the Peregrine soliton so special as a prototype of freak waves?, *J Eng Math* 2010; 67: 11–22.
- [13] Akhmediev N, Soto-Crespo JM, Ankiewicz A. Extreme waves that appear from nowhere: on the nature of rogue waves. *Phys Lett A* 2009; 373: 2137–2145.
- [14] Kibler B, *et al.* The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics. *Nat Phys* 2010; 6: 790.
- [15] Zakharov and VE, Shabat AB. Exact Theory of Two-Dimensional Self-Focusing and One-Dimensional Self-Modulation of Waves in Nonlinear Media. *Zh Eksp Teor Fiz* 1972; 34: 118–134.
- [16] Ablowitz MJ, Prinari B, Trubatch AD. Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems. *October* 2004; 43: 127–132.
- [17] Bludov YV, Konotop VV, Akhmediev N. Rogue waves as spatial energy concentrators in arrays of nonlinear waveguides. *Opt Lett* 2009; 34: 3015–7.
- [18] Efe S, Yuce C. Discrete rogue waves in an array of waveguides. *Phys Lett Sect A Gen At Solid State Phys* 2015; 379: 1251–1255.
- [19] Ankiewicz A, Kedziora DJ, Akhmediev N. Rogue wave triplets. *Phys Lett Sect A Gen At Solid State Phys* 2011; 375: 2782–2785.