3. DERECEDEN POLİNOMLARIN GRAFİĞİ YARDIMIYLA REEL KÖK SAYISI ve KÖKLERİN ARALIĞININ TESPİTİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Öğr. Gör. Erkan TAŞDEMİR

Kırklareli Üniversitesi Pınarhisar Meslek Yüksekokulu

erkan.tasdemir@kirklareli.edu.tr

1. Giriş

Tanım 1.1 $n \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ifadesine *n*. dereceden *polinom* denir.

Teorem 1.2 (Bolzano Teoremi) f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a).f(b) < 0$ olsun. Bu durumda $f(c) = 0$ olacak biçimde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır. Yani $f(x) = 0$ eşitliğinin (a,b) aralığında bir çözümü vardır.

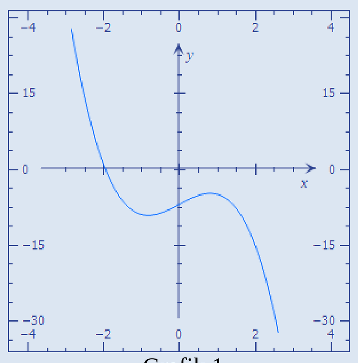
Teorem 1.3 (Ara Değer Teoremi) f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $x_1 < x_2$ olmak üzere $x_1, x_2 \in [a,b]$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ arasındaki her değeri alır, yani $f(x_1) < d < f(x_2)$ ise $f(c) = d$ olacak biçimde bir $c \in (x_1, x_2)$ noktası vardır.

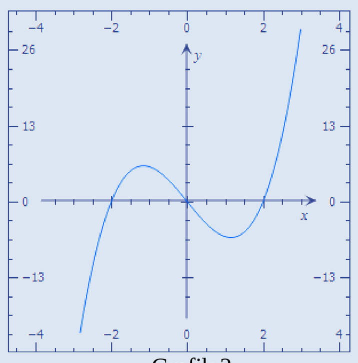
2. Üçüncü Dereceden Polinomların Reel Kök Sayısının İncelenmesi

Burada $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ polinomunun reel köklerinin sayısı 1. türevin geometrik yorumu kullanılarak incelenecektir. Öncelikle $P_n(x)$ polinomu her zaman tanımlı ve sürekli olduğundan grafiğini tahmin etmek daha kolay olacaktır. Şimdi $P_3(x)$ grafiğinin hangi bölgeden gelip hangi bölgeye gittiğini inceleyelim. Bunun için $\lim_{x \to -\infty} P_n(x)$ ve $\lim_{x \to \infty} P_n(x)$ limitlerini kullanacağız. $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ polinomu için,

$$\lim_{x \to -\infty} P_3(x) = \begin{cases} -\infty; & a_3 > 0 \\ +\infty; & a_3 < 0 \end{cases} \text{ ve } \lim_{x \to \infty} P_3(x) = \begin{cases} +\infty; & a_3 > 0 \\ -\infty; & a_3 < 0 \end{cases}$$

olduğu aşikârdır.

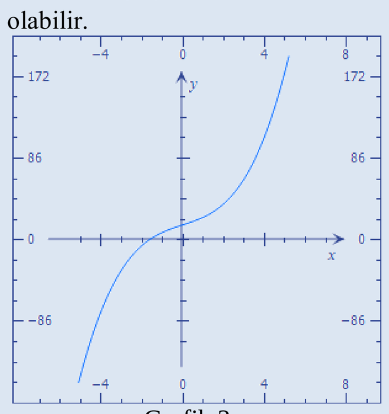

Grafik 1

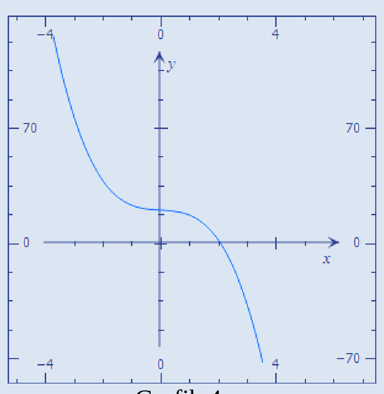

Grafik 2

Yani 3. dereceden polinomların grafiği *grafik 1* ve *grafik 2* de görüldüğü gibi ya 3. bölgede başlayıp 1. bölgede devam eder ya da 2. bölgede başlayıp 4. bölgede devam eder. Dolayısıyla Bolzano Teoremine göre $P_3(x)$ polinomların en az bir reel kökü vardır.

Teorem 2.1 $P_3(x)$ polinomun fonksiyonunun türevi olan $P_3'(x)$ polinomunda $P_3'(x) = 0$ denkleminin reel kökleri yok ise bu durumda $P_3(x) = 0$ denkleminin sadece bir tane reel kökü vardır.

İspat $P_3'(x)$ polinomunda $P_3'(x) = 0$ denkleminin reel kökleri yok ise bu durumda $P_3(x)$ polinomunun grafiği kesin artan ya da kesin azalan olacaktır. Çünkü $P_3'(x) = 0$ denklemini sağlayan reel kök bulunamadığından yerel ekstremum noktası yoktur. Dolayısıyla $P_3(x)$ polinom fonksiyonunun grafiği iki şekilde olabilir.

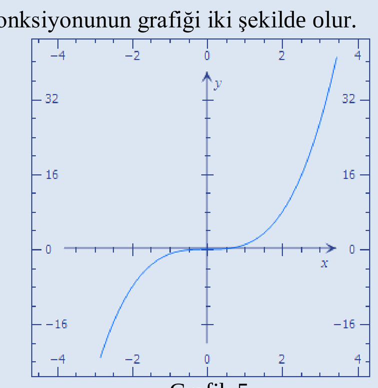

Grafik 3

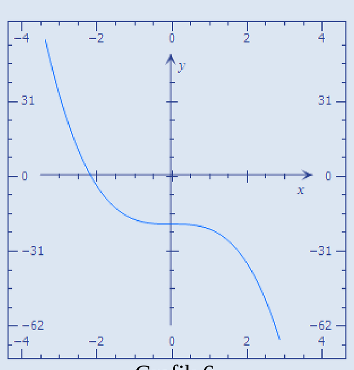

Grafik 4

Grafik 3 ve *grafik 4*'te görüldüğü gibi grafikler *x* eksenini sadece birer noktada kesmektedir. Dolayısıyla $P_3(x) = 0$ denkleminin sadece bir tane reel kökü vardır.

Teorem 2.2 $P_3(x)$ polinomun fonksiyonunun türevi olan $P_3'(x)$ polinomunda $P_3'(x) = 0$ denkleminin reel kökleri çakışık yani eşit ise bu durumda $P_3(x) = 0$ denkleminin sadece bir tane reel kökü vardır.

İspat $P_3'(x)$ polinomunda $P_3'(x) = 0$ denkleminin reel kökleri çakışık yani eşit ise bu durumda $P_3(x)$ polinomunun grafiği artmayan ya da azalmayan olacaktır. Çünkü $P_3'(x) = 0$ denklemini sağlayan reel kökler çakışık olduğundan türev işaret değiştirmeyecektir. Türev işaret değiştirmediğinden yerel ekstremum nokta yoktur. Dolayısıyla $P_3(x)$ polinom fonksiyonunun grafiği iki şekilde olur.


Grafik 5


Grafik 6

Grafik 5 ve *grafik 6*'da görüldüğü gibi grafikler *x* eksenini sadece birer noktada kesmektedir. Dolayısıyla $P_3(x) = 0$ denkleminin sadece bir tane reel kökü vardır.

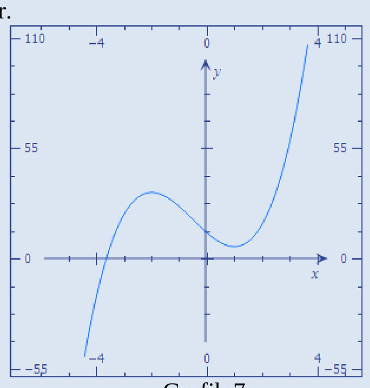
Teorem 2.3 $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ şeklinde tanımlansın. $P_3'(x) = 0$ denkleminin iki farklı reel kökü α_1 ve α_2 olsun. Bu durumda $P_3(x)$ polinom fonksiyonunun reel kökleri için üç farklı durum oluşur.

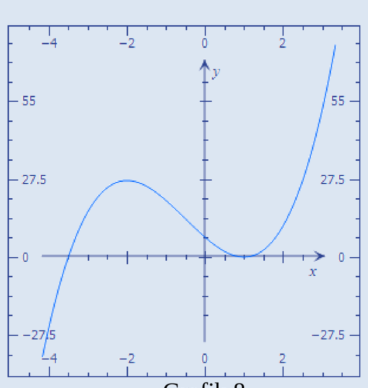
i. $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) > 0$ ise bir tane reel, iki tane karmaşık sayı kök vardır.

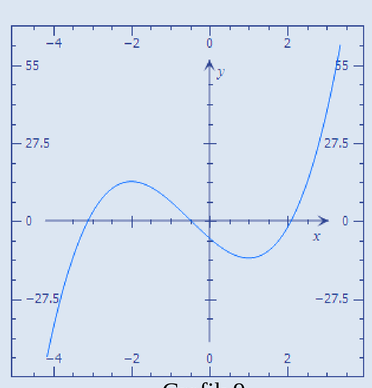
ii. $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) = 0$ ise ikisi çakışık olmak üzere üç tane reel kök vardır.

iii. $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) < 0$ ise üç farklı reel kök vardır.

İspat α_1 ve α_2 değerlerini $P_3(x)$ polinomunda yerine yazdığımızda elde edeceğimiz görüntüler $P_3(x)$ polinom fonksiyonunun yerel ekstremum değerleri olacaktır.


Grafik 7


Grafik 8


Grafik 9

i. $P_3(\alpha_1)$ ve $P_3(\alpha_2)$ değerleri aynı işaretli olduğu durumda bu değerler *x* ekseninin ya üstünde ya da altında olur.

Grafik 7'de görüldüğü gibi $P_3(x)$ polinom fonksiyonunun *x* eksenini sadece bir noktada kesmesi mümkün olur. Bu durumda $P_3(x) = 0$ denkleminin köklerinden sadece bir tanesi reeldir. Aynı işaretli iki sayının çarpımı pozitif olduğundan $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) > 0$ elde edilir. Dolayısıyla $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) > 0$ ise $P_3(x)$ polinom fonksiyonunun bir tane reel iki tane karmaşık sayı kökü vardır.

ii. $P_3(\alpha_1)$ ve $P_3(\alpha_2)$ değerlerinden biri sıfır olduğunda $P_3(x)$ polinom fonksiyonunun *x* eksenine teğet olur. Teğet olduğu noktadaki kök çift katlı köktür.

Grafik 8 incelendiğinde $P_3(x)$ polinom fonksiyonunun *x* eksenini iki farklı noktada kestiği görülmektedir. Bu durumda $P_3(x) = 0$ denkleminin köklerinin ikisi çakışık olmak üzere üç tanesinin de reel olduğu görülür. Ayrıca $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) = 0$ olduğu da açıktır. Dolayısıyla $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) = 0$ ise $P_3(x)$ polinom fonksiyonunun ikisi çakışık olmak üzere üç tane reel kökü vardır.

iii. $P_3(\alpha_1)$ ve $P_3(\alpha_2)$ değerleri zıt işaretli olduğu durumda bu değerlerden biri *x* ekseninin altında diğeri ise *x* ekseninin üstünde olur.

Grafik 9 incelendiğinde $P_3(x)$polinom fonksiyonunun *x* eksenini üç farklı noktada kestiği görülmektedir. Bu durumda $P_3(x) = 0$ denkleminin üç farklı reel kökü olduğu elde edilir. Ayrıca $P_3(\alpha_1)$ ve $P_3(\alpha_2)$ değerleri zıt işaretli olduğundan $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) < 0$ olduğu aşikârdır. Dolayısıyla $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) < 0$ ise $P_3(x)$ polinom fonksiyonunun üç farklı reel kökü vardır.

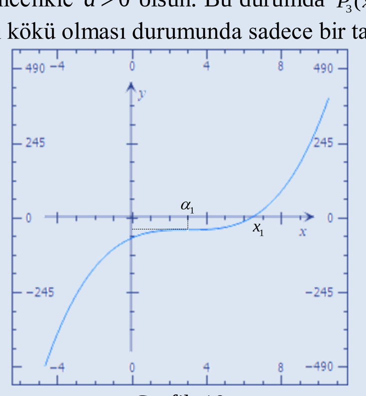
3. Üçüncü Dereceden Polinomların Reel Köklerinin Aralığının İncelenmesi

Bu kısımda $P_3'(x) = 0$ denkleminin kökleri kullanılarak $P_3(x) = 0$ denkleminin reel köklerinin aralığı belirlenecektir.

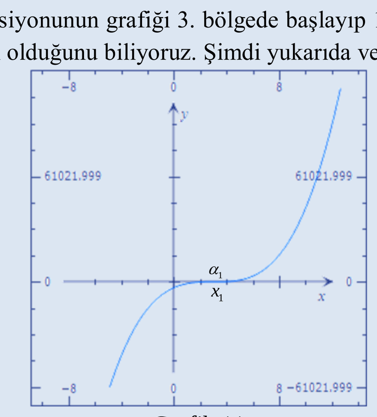
Teorem 3.1 $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom fonksiyonunda $P_3'(x) = 0$ denkleminin çift katlı kökü α_1 olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

$a > 0$	$a < 0$
$P_3(\alpha_1) < 0 \Rightarrow x_1 > \alpha_1$	$P_3(\alpha_1) < 0 \Rightarrow x_1 < \alpha_1$
$P_3(\alpha_1) = 0 \Rightarrow x_1 = \alpha_1$	$P_3(\alpha_1) = 0 \Rightarrow x_1 = \alpha_1$
$P_3(\alpha_1) > 0 \Rightarrow x_1 < \alpha_1$	$P_3(\alpha_1) > 0 \Rightarrow x_1 > \alpha_1$

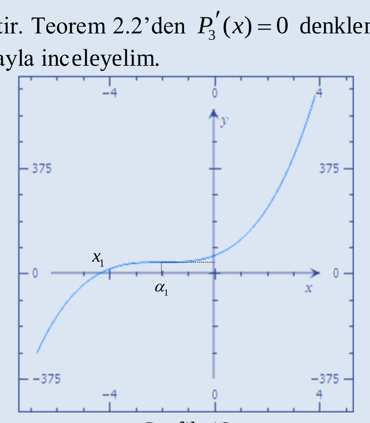
İspat Öncelikle $a > 0$ olsun. Bu durumda $P_3(x)$ polinom fonksiyonunun grafiği 3. bölgede başlayıp 1. bölgede bitecektir. Teorem 2.2'den $P_3'(x) = 0$ denkleminin çift katlı kökü olması durumunda sadece bir tane reel kökünün olduğunu biliyoruz. Şimdi yukarıda verilen durumlar sırayla inceleyelim.


Grafik 10

Eğer $P_3(\alpha_1) < 0$ ise *Grafik 10*'da görüldüğü gibi $x_1 > \alpha_1$ olduğu açıktır.

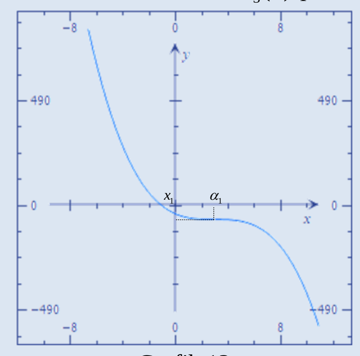

Grafik 11

Eğer $P_3(\alpha_1) = 0$ ise *Grafik 11*'de görüldüğü gibi $x_1 = \alpha_1$ olduğu açıktır.

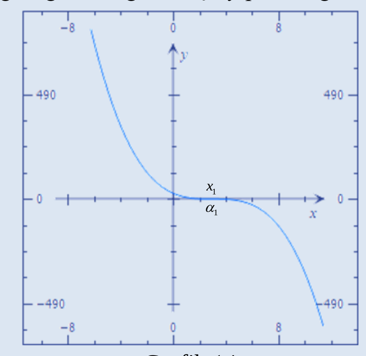

Grafik 12

Eğer $P_3(\alpha_1) > 0$ ise *Grafik 12*'de görüldüğü gibi $x_1 < \alpha_1$ olduğu açıktır.

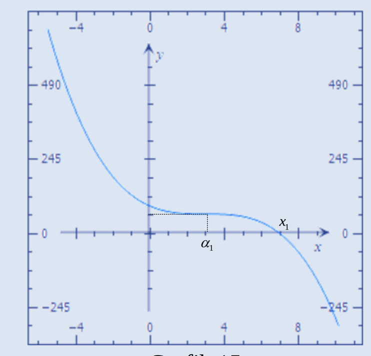
Şimdi $a < 0$ olsun. Bu durumda $P_3(x)$ polinom fonksiyonunun grafiği 2. bölgede başlayıp 4. bölgede bitecektir.


Grafik 13

Eğer $P_3(\alpha_1) < 0$ ise *grafik 13*'ten $x_1 < \alpha_1$ olduğu açıktır.


Grafik 14

Eğer $P_3(\alpha_1) = 0$ ise *grafik 14*'ten $x_1 = \alpha_1$ olduğu açıktır.


Grafik 15

Eğer $P_3(\alpha_1) > 0$ ise *grafik 15*'ten $x_1 > \alpha_1$ olduğu açıktır.

Teorem 3.2 $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom fonksiyonunda $P_3'(x) = 0$ denkleminin reel kökleri α_1 ve α_2 olsun. Ayrıca $\alpha_1 < \alpha_2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

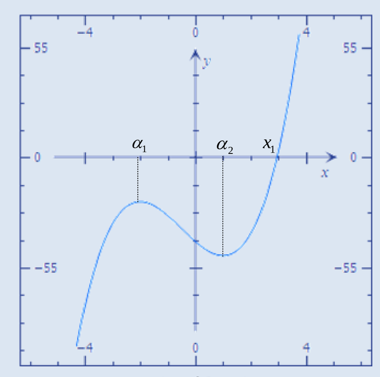
$$P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 < \alpha_2 < x_1 \\ x_1 < \alpha_1 < \alpha_2 \end{cases}$$

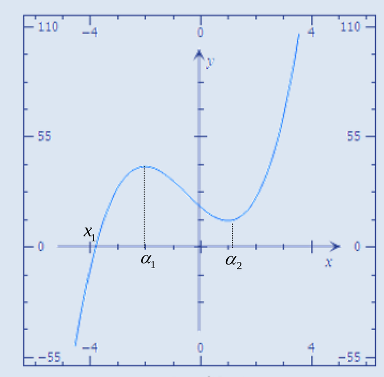
$$P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha_1 < \alpha_2 < x_2 \\ x_1 < \alpha_1 < \alpha_2 = x_2 \end{cases}$$

$$P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) < 0 \Rightarrow \{ x_1 < \alpha_1 < x_2 < \alpha_2 < x_3$$

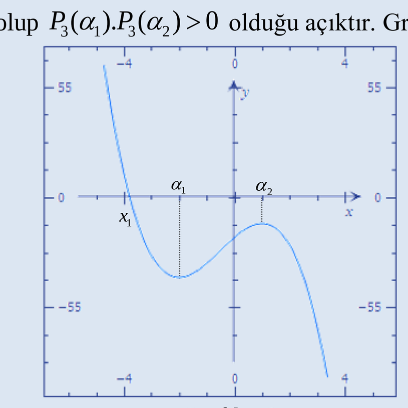
olarak gerçekleşir.

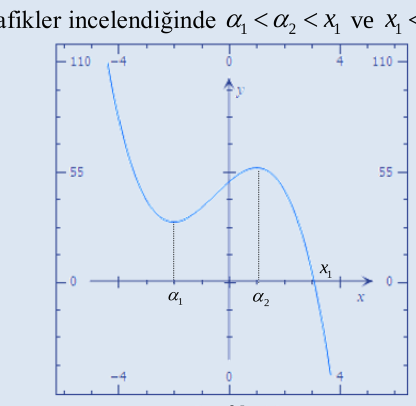
İspat $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) > 0$ olsun. Bu durumda $P_3(\alpha_1)$ ve $P_3(\alpha_2)$ aynı işaretli olur. Dolayısıyla bu iki nokta da koordinat sisteminde *x* ekseninin ya altında ya da üstünde olur. Yani,


Grafik 16


Grafik 17

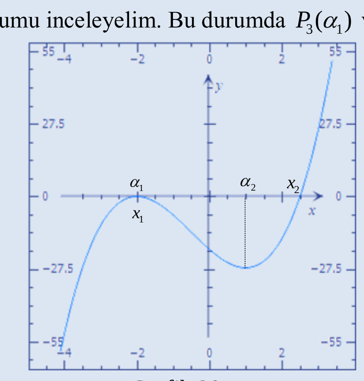
Grafik 16 ve *Grafik 17*'de $a > 0$ olup $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) > 0$ olduğu açıktır. Grafikler incelendiğinde $\alpha_1 < \alpha_2 < x_1$ ve $x_1 < \alpha_1 < \alpha_2$ olduğu aşikârdır.

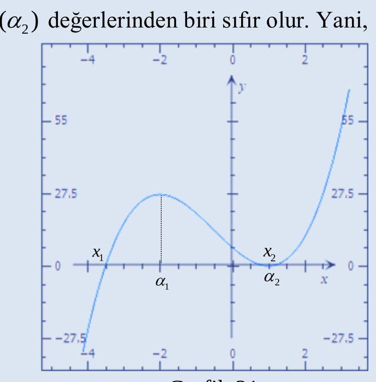

Grafik 18


Grafik 19

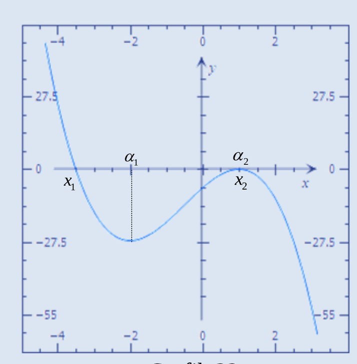
Grafik 18 ve *Grafik 19*'da $a < 0$ olup $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) > 0$ olduğu açıktır. Grafikler incelendiğinde $\alpha_1 < \alpha_2 < x_1$ ve $x_1 < \alpha_1 < \alpha_2$ olduğu aşikârdır. Böylece ilk kısmın ispatı tamamlanmış olur.

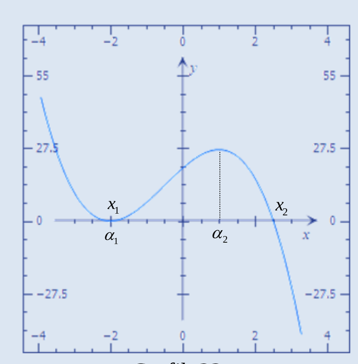
Şimdi $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) = 0$ olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda $P_3(\alpha_1)$ ve $P_3(\alpha_2)$ değerlerinden biri sıfır olur. Yani,


Grafik 20


Grafik 21

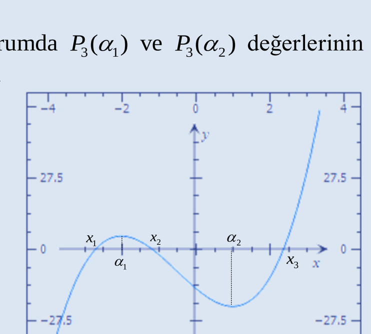
Grafik 20 ve *grafik 21*'de $a > 0$ olup $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) = 0$ olduğu açıktır. Grafikler incelendiğinde $x_1 = \alpha_1 < \alpha_2 < x_2$ ve $x_1 < \alpha_1 < \alpha_2 = x_2$ olduğu aşikârdır. Aynı durumu $a < 0$ için de inceleyelim.

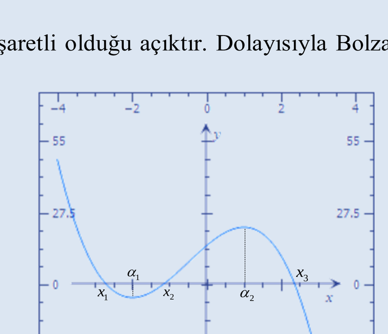

Grafik 22


Grafik 23

Grafik 22 ve *grafik 23*'de $a < 0$ olup $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) = 0$ olduğu açıktır. Grafikler incelendiğinde $x_1 = \alpha_1 < \alpha_2 < x_2$ ve $x_1 < \alpha_1 < \alpha_2 = x_2$ olduğu açıkça görülebilir. Böylece ikinci durumun ispatı da tamamlanmış olur. Son olarak üçüncü durumu inceleyelim.

Şimdi $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) < 0$ olsun. Bu durumda $P_3(\alpha_1)$ ve $P_3(\alpha_2)$ değerlerinin zıt işaretli olduğu açıktır. Dolayısıyla Bolzano teoremine göre α_1 ve α_2 değerleri arasında bir reel kökü olduğu kesindir.


Grafik 24


Grafik 25

Grafik 24'te $a > 0$ ve *grafik 25*'te $a < 0$ olup her iki durumda da $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) < 0$ olarak gerçekleşir. Ayrıca grafikler incelendiğinde köklerin $x_1 < \alpha_1 < x_2 < \alpha_2 < x_3$ sıralamasını sağlayacağı basitçe görülebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. Sonuç ve Değerlendirme

4.1 $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom fonksiyonunun en az bir reel kökünün bulunduğu gösterilmiştir.

4.2 Reel kök sayısının bulunmasına ilişkin bağıntılar.

Bir tane Reel kök olması durumu	İki tane Reel kök olması durumu	Üç tane Reel kök olması durumu
• $P_3'(x) = 0$ denkleminin reel kökü olmaması durumunda, • $P_3'(x) = 0$ denkleminin reel köklerinin birbirine eşit (çakışık) olması durumunda, • $P_3'(x) = 0$ denkleminin reel kökleri birbirinden farklı α_1 ve α_2 için $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) > 0$ olması durumunda gerçekleşir.	• $P_3'(x) = 0$ denkleminin reel kökleri birbirinden farklı α_1 ve α_2 için $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) = 0$ olması durumunda gerçekleşir.	• $P_3'(x) = 0$ denkleminin reel kökleri birbirinden farklı α_1 ve α_2 için $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) < 0$ olması durumunda gerçekleşir.

4.3 Reel köklerin aralığına ilişkin bağıntılar.

$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom fonksiyonu için, $P_3'(x) = 0$ denkleminin reel kökleri α_1 ve α_2 olsun.

$\alpha_1 = \alpha_2$		$\alpha_1 \neq \alpha_2$ ve $\alpha_1 < \alpha_2$
$a > 0$	$a > 0$	
• $P_3(\alpha_1) < 0 \Rightarrow x_1 > \alpha_1$ • $P_3(\alpha_1) = 0 \Rightarrow x_1 = \alpha_1$ • $P_3(\alpha_1) > 0 \Rightarrow x_1 < \alpha_1$	• $P_3(\alpha_1) < 0 \Rightarrow x_1 < \alpha_1$ • $P_3(\alpha_1) = 0 \Rightarrow x_1 = \alpha_1$ • $P_3(\alpha_1) > 0 \Rightarrow x_1 > \alpha_1$	• $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 < \alpha_2 < x_1 \\ x_1 < \alpha_1 < \alpha_2 \end{cases}$ • $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha_1 < \alpha_2 < x_2 \\ x_1 < \alpha_1 < \alpha_2 = x_2 \end{cases}$ • $P_3(\alpha_1).P_3(\alpha_2) < 0 \Rightarrow \{ x_1 < \alpha_1 < x_2 < \alpha_2 < x_3$

Kaynaklar

[1] Thomas B G Jr, "Thomas' Calculus Eleventh Edition", Pearson Addison-Wesley, 2005

[2] Bizim O, Tekcan A ve Gezer B, "Genel Matematik Diferansiyel ve İntegral Hesap", Dora Yayınları, 2011

[3] Unutulmaz O, "Uygulamalı Temel Matematik", Detay Yayıncılık, 2009

[4] Çelik B, Cangül İ N, Çelik N, Bizim O ve Öztürk M, "Temel Matematik", Dora Yayınları, 2010

[5] Kartal M, Kartal Z ve Karagöz Y, "Temel Matematik cilt 1", Nobel Yayın Dağıtım, 2009

[6] Küçük Y, Üreyen M, Orhon N, Şenel M, Özer O ve Azcan H, "Genel Matematik", Anadolu Üniversitesi Yayınları, 2001